SUMBER BELAJAR PENUNJANG PLPG 2016

MATA PELAJARAN/PAKET KEAHLIAN

MATEMATIKA

BAB XIII
SISTEM BILANGAN REAL DAN PERPANGKATAN

Dr. Djadir, M.Pd.
Dr. Ilham Minggi, M.Si
Ja’faruddin,S.Pd.,M.Pd.
Ahmad Zaki, S.Si.,M.Si
Sahlan Sidjara, S.Si.,M.Si

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL GURU DAN TENAGA KEPENDIDIKAN
2016

BAB XIII

SISTEM BILANGAN REAL DAN PERPANGKATAN

A. Kompetensi Inti

Menguasai materi, struktur, konsep dan pola pikir keilmuan yang mendukung mata pelajaran yang diampu.

B. Kompetensi Dasar

Mengunakan bilangan, hubungan diantara bilangan, berbagai sistem bilangan dan teori bilangan.

C. Indikator Pencapaian Kompetensi

1. Memahami operasi pada bilangan real.
2. Menerapkan operasi pada bilangan real.
3. Memahami operasi pada bilangan berpangkat.
4. Menerapkan operasi pada bilangan berpangkat.

D. Uraian Materi

1. Sistem Bilangan Real.

Himpunan bilangan real dinotasikan sebagai $\mathbb{R}$ merupakan gabungan dari himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional. Bilangan rasional merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}$(dibaca: a, b anggota himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$) dan , $b \neq 0$ dengan$\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat yang terdiri dari bilangan bulat positif, bilangan bulat negatif dan bilangan bulat nol. himpunan bilangan bulat dinotasikan sebagai

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots.\}.$$

Himpunan bilangan rasional dinotasikan sebagai

$$\mathbb{Q} = \{r \mid r = \frac{a}{b}, \text{dengan } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$

Perhatikan bahwa setiap bilangan real dapat ditulis sebagai bentuk desimal dan bilangan rasional dapat ditulis sebagai bentuk desimal yang berhenti atau berulang, sebagai contoh

$$2 = 2{,}0000 \dots$$

$$\frac{1}{4} = 0,2500 \ldots$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \ldots$$

$$\frac{1}{12} = 0,0833 \ldots$$

Bentuk-bentuk seperti $2 = 2,0000 \ldots$ dan $\frac{1}{4} = 0,2500 \ldots$ merupakan bentuk desimal yang berhenti. Sedangkan, $\frac{1}{3} = 0,3333 \ldots$ dan $\frac{1}{12} = 0,00833 \ldots$ merupakan bentuk desimal yang berulang. Jadi, bilangan rasional bisa berbentuk bilangan bulat, pecahan dan campurannya. Pecahan didefinisikan sebagai bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ dan $a \neq kb$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Pada pecahan yang berbentuk $\frac{a}{b}$, disini a disebut sebagai pembilang dan b disebut sebagai penyebut.Bentuk desimal yang tidak berhenti atau tidak berulang disebut sebagai bilangan irasional misalnya $\sqrt{2} = 1,4142 \ldots.$, $\pi = 3,14159\ldots.$.

a. Sifat-Sifat Bilangan Real

TERHADAP OPERASI PENJUMLAHAN (+)

1. Sifat Tertutup
   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a + b \in \mathbb{R}$.
2. Sifat Komutatif
   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a + b = b + a$
3. Sifat Asosiatif (Pengelompokan)
   Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. Terdapat $0 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a + 0 = a$
5. Setiap $a \in \mathbb{R}$ terdapat $-a \in \mathbb{R}$ sehingga $a + (-a)=0$

NOTASI

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + (-b) = a - b$. (Pengurangan)
2. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = a : b$ (Pembagian)
3. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \times b = a.b$ (Perkalian)

TERHADAP OPERASI PERKALIAN ($\times$)

1. Sifat Tertutup
   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a \times b \in \mathbb{R}$.
2. Sifat Komutatif
   Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ berlaku $a \times b = b \times a$
3. Sifat Asosiatif (Pengelompokan)
   Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
4. Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ berlaku $a \times 1 = a$
5. Setiap $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ terdapat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sehingga $a \times (\frac{1}{a})$=1

Perkalian dapat dipandang sebagai penjumlahan yang berulang sebagai contoh:

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3$ dan juga $5 + 5 + 5 = 3 \times 5$, secara umum jika $a \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{a + a + a + a + a + \cdots + a}_{\text{Penjumlahan sebanyak } n} = n \times a.$$

CATATAN:

1. Untuk $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \Rightarrow \; a \times (\frac{1}{b}) = \frac{a}{b}$.
2. Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\frac{a}{0}$ tidak didefinisikan (Pembagian dengan nol tidak didefinisikan)

SIFAT DISTRIBUTIF:

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

2. $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.

Berikut ini adalah hal-hal yang perlu diperhatikan dalam operasi hitung pada sistem bilangan real:

1. Penjumlahan dan pengurangan berada pada tingkat yang sama.
2. Perkalian dan pembagian berada pada tingkat yang sama.

3. Operasi perkalian dan pembagian lebih tinggi tingkatannya daripada operasi penjumlahan dan pengurangan sehingga harus dikerjakan terlebih dahulu.
4. Apabila terdapat operasi hitung campuran setingkat, maka yang harus dikerjakan terlebih dahulu adalah yang terletak sebelah kiri.
5. Apabila dalam operasi hitung campuran terdapat tanda kurung, maka yang terlebih dahulu dikerjakan adalah operasi hitung yang terletak pada tanda kurung.

Contoh:

1.Hitunglah nilai dari $10 \times 3 : 5 + 6 \times 4 : 2 - 7 \times 2 : 1 = \cdots$

Jawab:

$$10 \times 3 : 5 + 6 \times 4 : 2 - 7 \times 2 : 1 = (10 \times 3): 5 + (6 \times 4): 2 - (7 \times 2): 1$$
$$= 30: 5 + 24: 2 - 14: 1$$
$$= (30: 5) + (24: 2) - (14: 1)$$
$$= 6 + 12 - 14 = 18 - 14 = 4.$$

2. Hitunglah nilai dari $6: 3 + 7 \times 5 - 3: (2 + 1) = \cdots$

Jawab:

$$6: 3 + 7 \times 5 - 3: (2 + 1) = 6: 3 + 7 \times 5 - 3: 3$$
$$= (6: 3) + (7 \times 5) - (3: 3)$$
$$= 2 + 35 - 1 = 36.$$

Untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, berlaku:

1. $(-a) \times (-b) = a \times b$.
2. $(-a) \times (b\ ) = (a) \times (-b) = -(a \times b)$.
3. $(-1) \times (a) = -a$.
4. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ berlaku $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a) \times (d) = (b) \times (c)$.
5. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) + (b \times c)}{(b \times d)}$.
6. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ berlaku $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{(a \times d) - (b \times c)}{(b \times d)}$.
7. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ berlaku $\left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(a \times c)}{(b \times d)}$
8. Untuk $b \neq 0$ dan $d \neq 0$ berlaku $\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \times \left(\frac{d}{c}\right)$

Contoh:

1. $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}=\frac{(1\times3)+(2\times4)}{(2\times3)}=\frac{3+8}{6}=\frac{11}{6}$.

2. $(-2)\times5=-10$.

3. $(-3)\times(-7)=21$

4. $\frac{1}{2}:\frac{4}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$.

5. $2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=2+\frac{1}{\frac{3+2}{3}}=2+\frac{1}{\frac{5}{3}}=2+\frac{3}{5}=\frac{(2\times5)+3}{5}=\frac{10+3}{5}=\frac{13}{5}$.

6. Tentukan nilai $y\in\mathbb{R}$ sehingga $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)+8\right)=1$

Jawab:

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)+8\right)=1$$
$$\Rightarrow\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)+16\right)=2$$
$$\Rightarrow\frac{1}{5}\left(\frac{2y+3}{3}+8\right)=2$$
$$\Rightarrow\frac{2y+3}{3}=2$$
$$\Rightarrow 2y+3=6\Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

Misalkan a,b bilangan bulat positif berlaku

1 . $\frac{1}{a\times(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$

2. $\frac{1}{a\times(a+b)}=\frac{1}{b}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}\right)$

3. $\frac{1}{a\times(a+1)\times(a+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a\times(a+1)}-\frac{1}{(a+1)\times(a+2)}\right)$

Contoh

Hitunglah nilai dari $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}=$

Jawab

Untuk setiap a bilangan bulat positif berlaku $\frac{1}{2\times(a+1)}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}\right)$ jadi diperoleh

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{7\times 9}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{9}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$$

b. Persen

Persen disebut sebagai "perseratus" yaitu pecahan yang berpenyebut 100 yang dinotasikan dengan %.Jadi, persen menyajikan hubungan dengan bilangan 100.

Contoh:

1. $35\%=\frac{35}{100}$
2. $27\%=\frac{27}{100}$

Dengan demikian, mengubah suatu pecahan biasa kedalam bentuk persen cukup dengan cara mengubah penyebutnya menjadi 100 atau dengan mengalikan pecahan tersebut dengan 100%

Contoh Soal:

1. $\frac{2}{5}=\frac{2\times 20}{5\times 20}=\frac{40}{100}=40\%$ atau $\frac{2}{5}\times 100\%=40\%$.
2. Tentukan nilai dari P jika 7% dari $(P-5)$ adalah 14.

Jawab:

$$7\%\times(P-5)=14\Rightarrow\frac{7}{100}\times(P-5)=14\Rightarrow P-5=\frac{14}{7}\times 100\Rightarrow P=205$$

3. Pak Anto memiliki 200 ekor ayam. Pada suatu hari ayamnya terserang flu burung dan mati 36 ekor. Berapa persen ayam pak Anto yang mati?

Jawab:

Ayam pak Anto mula-mula adalah 200 ekor dan yang mati sebanyak 36 ekor, sehingga yang mati sebanyak $\frac{36}{200}=\frac{9}{50}$ bagian. Sehingga ayam pak joko yang mati sebanyak $\frac{9}{50}\times 100\%=18\%$.

2. Bilangan Berpangkat

Perhatikan bahwa

$$\underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{Perkalian sebanyak } n} = a^n. \text{ [dibaca: } a \text{ pangkat } n]$$

a disebut sebagai bilangan pokok dan n merupakan pangkat.

Misalkan a, b merupakan bilangan real dan m, n merupakan bilangan bulat positif maka

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
3. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\quad, a \neq 0$

Khusus untuk $a \neq 0$ bilangan real sebarang, berlaku $a^0 = 1$

Contoh:

1. $3^2 \times 3^2 = 3^{2+2} = 3^4 = 81$
2. $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64$
3. $(2 \times 3)^3 = 2^3 \times 3^3 = 8 \times 27 = 216$

Misalkan a bilangan real, $a \neq 0$ dan m, n bilangan bulat positif berlaku

1. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ untuk $m > n$.
2. $\frac{a^m}{a^n} = 1$ untuk $m = n$.
3. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ untuk $m < n$.
4. $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } n \text{ genap} \\ -1, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$

Contoh:

1. $\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = 2^3 = 8.$

2. $\frac{3^2}{3^2} = 1.$

3. $\frac{4^7}{4^5} = 4^2 = 16.$

BENTUK AKAR

Untuk setiap a, m dan n merupakan bilangan real dan $a, n > 0$ maka

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Untuk $m = 1$ dan $n = 2$, $a > 0$ dinotasikan sebagai $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

SIFAT-SIFAT BENTUK AKAR

Untuk setiap a, b, c dan n merupakan bilangan real positif maka berlaku:

1. $a\sqrt[n]{c} \ \pm \ b\sqrt[n]{c} = (a \pm b)\sqrt[n]{c}$

2. $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$

4. $\sqrt{(a + b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Contoh:

Carilah bentuk sederhana dari $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

Jawab:

$$\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

MERASIONALKAN PENYEBUT BENTUK AKAR

1. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$

2. $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}-a\sqrt{c}}{b-c}$, $a, b, c \in \mathbb{R},, \ b, c > 0$

3. $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} \times \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{b}+a\sqrt{c}}{b+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R},, \ b, c > 0$

DAFTAR PUSTAKA

Bello, Ignacio and Britton, Jack R (1982). *Contemporary College Algebra*. New York: Harper& row Publisher.

Jiagu, Xu (2010). *Lecture Notes On Mathematical Olympiad Courses For Junior Section (Volume I)*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Ridon, Purcell and Ridon (2007). Calculus: Ninth Edition. Prentice Hall. Inc